PART3 指数関数を含む方程式・不等式

要点 ① 指数関数を含む方程式

a を 1 でない正の定数，すなわち $a>1$，$a \neq 1$ とするとき，以下のことがいえる。

指数の相等

$$p=q \iff a^p=a^q$$

このことを利用して，指数関数を含む方程式を解く。

例　方程式 $8^x=4$ を解く。

$8^x=$　　　$=$　　，$4=$　　であるから，与えられた方程式は

$2^{3x}=2^2$

よって　　　　　　　したがって　$x=\dfrac{2}{3}$

このように，指数関数を含む方程式は，「　」をそろえ，$a^p=a^q$ の形を導くことで解くことができる。

要点 ② 指数関数を含む不等式

指数関数の大小に関する性質

$a>1$ のとき	$p<q$	$\iff$	$a^p<a^q$
$0<a<1$ のとき	$p<q$	$\iff$	$a^p>a^q$

を利用して，指数関数を含む不等式を解く。

例　不等式 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x>\dfrac{1}{32}$ を解く。

$\dfrac{1}{32}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^5$　であるから，与えられた不等式は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

底 $\dfrac{1}{2}$ は

[MEMO]

3 (1) 次の方程式を解け。

(i) $9^x = 243$　　(ii) $32^x = \dfrac{1}{16}$

(2) 次の不等式を解け。

(i) $4^x < 64$　　(ii) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x \geqq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2}$

Point Pickup

指数関数を含む方程式

「底」をそろえて，指数の性質

$a > 0$，$a \neq 1$ のとき　$p = q \iff a^p = a^q$

を利用する。

指数関数を含む不等式

「底」をそろえて，指数関数の大小に関する性質

$a > 1$ のとき　$p < q \iff a^p < a^q$

$0 < a < 1$ のとき　$p < q \iff a^p > a^q$

を利用する。

第13講　PART3 確認問題

次の方程式を解け。

1　$4^x=32$

$x=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

2　$9^x=\dfrac{1}{27}$

$x=-\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$

次の不等式を解け。

3　$3^x<81$

$\boxed{オ}$

①　$x<4$　　②　$x<27$　　③　$x>4$　　④　$x>3$

4　$\left(\dfrac{1}{4}\right)^x \geqq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}$

$\boxed{カ}$

①　$x\geqq 1$　　②　$x\geqq -1$　　③　$x\leqq 1$　　④　$x\leqq -2$

PART3 指数関数を含む方程式・不等式

3 (1) 次の方程式を解け。

(i) $9^x = 243$　　(ii) $32^x = \dfrac{1}{16}$

(2) 次の不等式を解け。

(i) $4^x < 64$　　(ii) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x \geqq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2}$

[解答]

(1) (i) $9^x = 243$ より $3^{2x} = 3^5$ よって $2x = 5$ したがって $x = \dfrac{5}{2}$

(ii) $32^x = \dfrac{1}{16}$ より $2^{5x} = 2^{-4}$ よって $5x = -4$ したがって $x = -\dfrac{4}{5}$

(2) (i) $4^x < 64$ より $2^{2x} < 2^6$

底 2 は 1 より大きいから $2x < 6$ したがって $x < 3$

(ii) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x \geqq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2}$ より $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x} \geqq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2}$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 0 より大きく 1 より小さいから $2x \leqq x-2$ したがって $x \leqq -2$

第 13 講　PART3 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：5，イ：2

[解説]

$4^x = 32$ より

$$2^{2x} = 2^5$$

よって

$$2x = 5 \quad \text{[A]}$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{5}{2}$$

[A]　$a > 0$，$a \neq 1$ のとき
$p = q \iff a^p = a^q$

2　**[正解]** ウ：3，エ：2

[解説]

$9^x = \dfrac{1}{27}$ より

$$3^{2x} = 3^{-3}$$

よって

$$2x = -3 \quad \text{[B]}$$

$$\boldsymbol{x} = -\frac{3}{2}$$

[B]　$a > 0$，$a \neq 1$ のとき
$p = q \iff a^p = a^q$

3　**[正解]** オ：①

[解説]

$3^x < 81$ より

$$3^x < 3^4$$

底 3 は 1 より大きいから [C]

$$\boldsymbol{x} < 4$$

[C]　$a > 1$ のとき
$p < q \iff a^p < a^q$

4 [正解] カ：③

[解説]

$\left(\frac{1}{4}\right)^x \geqq \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ より

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} \geqq \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$$

底 $\frac{1}{2}$ は 0 より大きく 1 より小さいから [D]

$$2x \leqq x+1$$

したがって

$$\boldsymbol{x \leqq 1}$$

[D]　$0<a<1$ のとき
$p<q \Longleftrightarrow a^p>a^q$